Università di Bologna – Campus di Rimini - Corsi di laurea in Farmacia e CQPS

Simulazione prova esame MATEMATICA – 24/11/2014

1. Calcolare : $\dfrac{(n-1)!+n!}{(n-1)!}$; $\log_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[2]{n}}\right)$

2. Se il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di 4 è 625, quanti sono gli oggetti? Quante sono le disposizioni semplici di tali oggetti a gruppi di 3?

3. Risolvere: $\sqrt[2]{8-x} \leq -5$; $|1-3x| \leq 2$; $7^{2x} \geq \dfrac{1}{49}$; $\log_{\frac{1}{3}}(5-x^2) > -1$ [9]

4. Determinare dominio, grafico e codominio della seguente funzione (studio globale):

$$y = f(x) = -e^x + 1$$

Determinare inoltre l'equazione della retta tangente in x = 0, una funzione primitiva di f(x), e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. [18]

@ @ @

5. Eseguire lo studio analitico della funzione $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ [24]

6. Date la funzione $y = 2\sin(x)$, scegliere un opportuno intervallo sul quale essa sia iniettiva, e individuare dominio, grafico e codominio della funzione inversa.

7. Qual è la probabilità che una coppia di cavie da laboratorio generi 4 maschi in una nidiata di 7 figli, supponendo che gli eventi maschio e femmina siano equiprobabili? Qual è la probabilità di generare 4 maschi su 7 figli nel caso che l'evento maschio abbia una probabilità pari a 6/11? [30]

@ @ @

8. Dimostrare che la funzione derivata della funzione $y = |x|$ è $y = \dfrac{x}{|x|}$. [lode]

Simulazione MATEMATICA 24/11/2014

1. $\dfrac{(n-1)!+n(n-1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(1+n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \underline{n+1}$

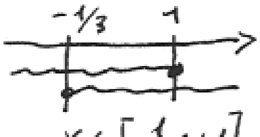
$n^y = \dfrac{1}{\sqrt[2]{n}} \qquad n^y = n^{-1/2} \qquad y = -\dfrac{1}{2} = \log_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[2]{n}}\right)$

2. $D^r_{n;4} = n^4 = 625 \qquad n^4 = 5^4 \qquad \underline{n=5}$

$D_{5;3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = \underline{60}$

3. * $\sqrt[2]{8-x} \leq -5 \qquad \nexists\, x \in \mathbb{R}$

* $|1-3x| \leq 2 \qquad -2 \leq 1-3x \leq +2 \qquad \begin{cases} 1-3x \geq -2 \\ 1-3x \leq +2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

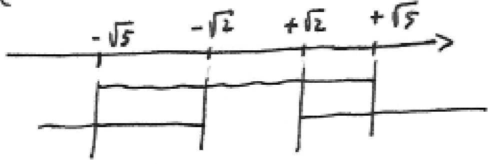


$\underline{x \in \left[-\frac{1}{3}; +1\right]}$

* $7^{2x} \geq \dfrac{1}{49} \qquad 7^{2x} \geq 7^{-2} \qquad 2x \geq -2 \qquad \underline{x \geq -1}$

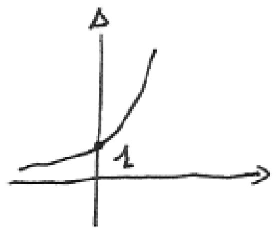
* $\log_{1/3}(5-x^2) > -1 \qquad \begin{cases} 5-x^2 > 0 \\ 5-x^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5<0 \\ 5-x^2<3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left]-\sqrt{5}; +\sqrt{5}\right[\\ x^2 > 2 \end{cases}$

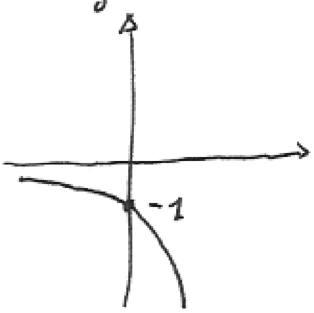
$\begin{cases} x \in \left]-\sqrt{5}; +\sqrt{5}\right[\\ x \in \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}; +\infty\right[\end{cases}$

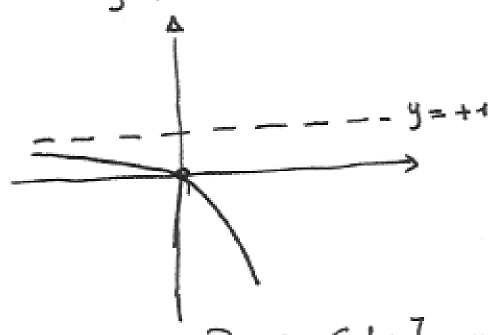


$\underline{x \in \left]-\sqrt{5}; -\sqrt{2}\right[\cup \left]+\sqrt{2}; +\sqrt{5}\right[}$

4. $y = e^x \xrightarrow{S_x} y = -e^x$ $\quad -y = e^x$ $\xrightarrow[1\,0]{T_y} y = -e^x + 1$ $\quad y - 1 = -e^x$







$\underline{D: \mathbb{R}}$; $Cd: \underline{]-\infty; +1[}$

* $x = \phi \rightarrow y = -e^{\phi} + 1 = -1 + 1 = \phi$

$y'(x) = -e^x \qquad m = y'(\phi) = -1 \qquad y = -1(x - \phi) + \phi \qquad \underline{y = -x}$

* $P(x) = -e^x + x + \text{cost.}$

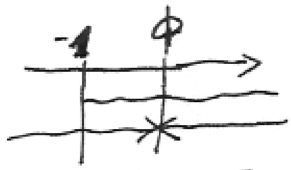
* $\lim_{x \to -\infty} \left(-e^{+x} + 1\right) = -\phi + 1 = 1$

~ ~ ~

<u>ATTENZIONE</u>! Gli esercizi n°5 e n°6 sono particolarmente difficili per lo standard d'esame

~ ~ ~

5. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ $\quad$ * $\begin{cases} x+1 > \phi \\ x \neq \phi \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \neq \phi \end{cases}$

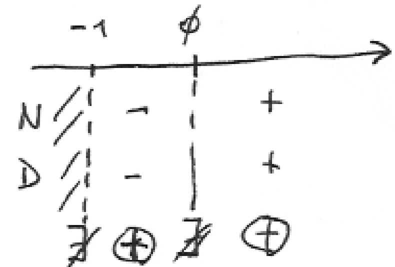


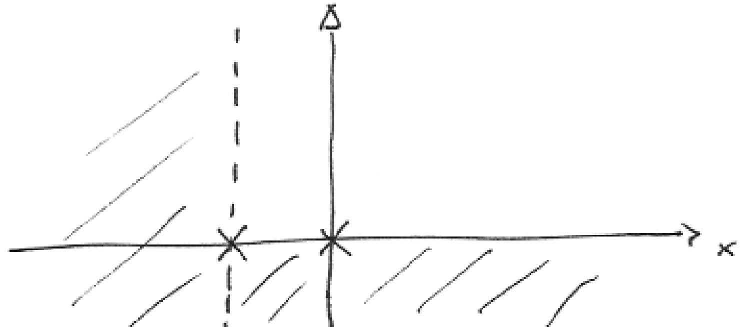
$\underline{x \in]-1; \phi[\cup]\phi; +\infty[}$

* Nessuna invarianza per simmetria

* $?x: y \geq \phi$ $\rightarrow N: \ln(x+1) \geq \phi \quad x + 1 \geq 1 \quad \underline{x \geq 0}$

$\rightarrow D: \underline{x \geq \phi}$



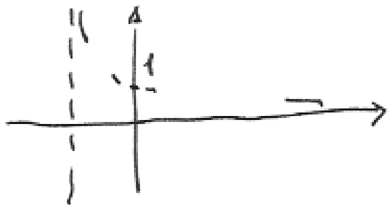


* $\lim_{x \to -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0^+)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

* $\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0^-+1)}{0^-} = \frac{0^-}{0^-}$ [IND.] $= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$ (De l'Hôpital)

* $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \sim \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$



* $y'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x-(x+1)\cdot\ln(x+1)}{x+1}}{x^2} = \frac{x-(x+1)\cdot\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$

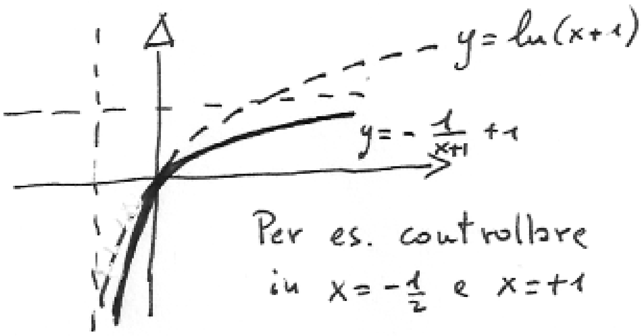
?x: $y' \geq 0$ → N: $x-(x+1)\cdot\ln(x+1) \geq 0$ - - - - -
→ D_1:
→ D_2:

Difficile! . . . seguire una via grafica . . .

?x: $N \geq 0$ $\quad \frac{x}{x+1} \geq \ln(x+1) \quad \frac{x+1-1}{x+1} \geq \ln(x+1) \quad 1 - \frac{1}{x+1} \geq \ln(x+1)$

Confronto tra 2 funzioni che sappiamo disegnare . .

$y = -\frac{1}{x+1} + 1$ e $y = \ln(x+1)$



Quindi $N \geq 0$ $\nexists x \in$ Dominio

Per es. controllare in $x = -\frac{1}{2}$ e $x = +1$

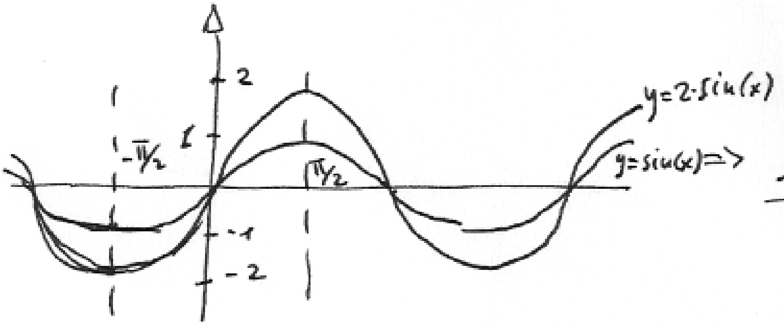
?x: $D \geq 0$ $\quad x^2 \geq 0$ $\forall x \in$ Dominio

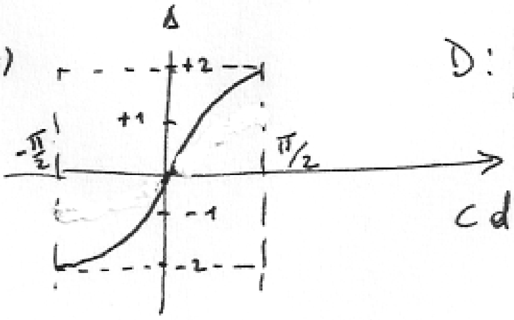
		-1		0	
N	///	×	−	0	−
D	///		+	×	+
		∄	⊖	∄	⊖

La funzione è decrescente sul suo dominio.

[ULTERIORI CHIARIMENTI NELL'ULTIMA PAGINA]

6. $y = 2\cdot\sin(x)$ è iniettiva se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

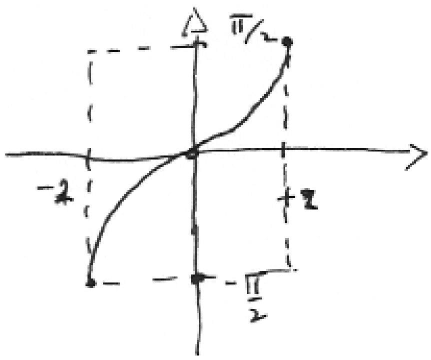




D: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

cd: $[-2; +2]$

$f^{-1}(x)$: $\quad x = 2\cdot\sin(y) \quad \frac{x}{2} = \sin(y) \quad y = \operatorname{arc}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$



D: $[-2; +2]$

Cd: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$

7. $P(4M \text{ su } 7) = \frac{1}{2^7} C_{7;4} = \frac{7!}{2^7 \cdot 4!\,3!} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{2^7\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{6}} = \frac{35}{128}$

$P'(4M \text{ su } 7) = C_{7;4}\left(\frac{6}{11}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^3$

8. $\lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{|x+dx|-|x|}{dx} = \lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{|x+dx|-|x|}{dx}\cdot\frac{|x+dx|+|x|}{|x+dx|+|x|}$

$= \lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{|x+dx|^2-|x|^2}{dx(|x+dx|+|x|)} = \lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx\cdot(|x+dx|+|x|)} =$

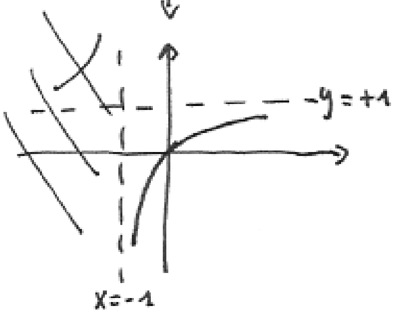
$= \lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{\cancel{x^2}+2x\cdot dx+dx^2-\cancel{x^2}}{dx\cdot(|x+dx|+|x|)} = \lim\limits_{dx\to\emptyset} \frac{\cancel{dx}(2x+dx)}{\cancel{dx}\cdot(|x+dx|+|x|)} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|}$

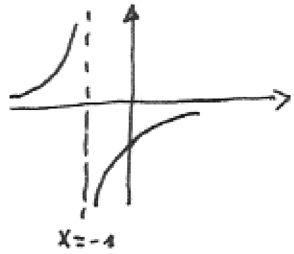
CHIARIMENTI SULLA RISOLUZIONE GRAFICA DELLA DISEQUAZIONE RELATIVA ALLO STUDIO DEL SEGNO DEL NUMERATORE DELLA DERIVATA

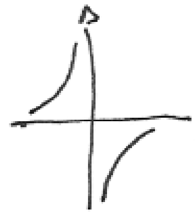
$$\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \geq \phi \qquad\qquad \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{f_1(x)} \geq \underbrace{\ln(x+1)}_{f_2(x)}$$

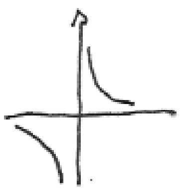
$$f_1(x): \quad y = -\frac{1}{x+1} + 1 \xleftarrow{T_y} y = -\frac{1}{x+1} \xleftarrow{T_x} y = -\frac{1}{x} \xleftarrow{S_x} y = \frac{1}{x}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{x+1} \qquad\qquad -y = \frac{1}{x}$$

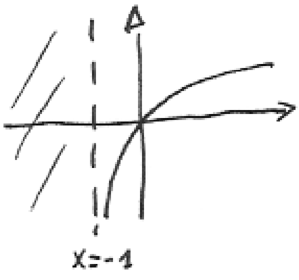


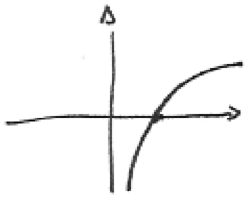






$$f_2(x): \quad y = \ln(x+1) \xleftarrow{T_x} y = \ln(x)$$





$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = \phi$$

Se $x = -\frac{1}{2}$ $\quad f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad f_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \quad \Rightarrow f_1\left(-\frac{1}{2}\right) < f_2\left(-\frac{1}{2}\right)$

Se $x = 1$ $\quad f_1(1) = +\frac{1}{2} \qquad f_2(1) = \ln 2 > \ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f_1(1) < f_2(1)$